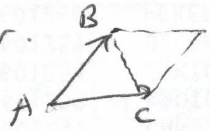
Vektörel Analiz Arasınav Çözümleri

1) Paralel yüzlü cismin hacmi

$V=|\det(\vec{A},\vec{B},\vec{C})|$, $\det(\vec{A},\vec{B},\vec{C})=\begin{vmatrix}2&1&0\\-1&0&2\\0&1&1\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}0&2\\1&1\end{vmatrix}-1\begin{vmatrix}-1&2\\0&1\end{vmatrix}$

$=2\cdot(-2)-1(-1)=-4+1=-3 \Rightarrow V=|-3|=3\ br^3$ olur

2) $\vec{AB}=(0-1,1-0,3-2)=(-1,1,1)$ $\vec{AC}=(2-1,1-0,0-2)=(1,1,-2)$

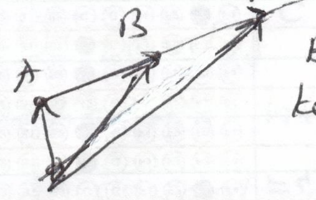
olur. 

Üçgenin Alanı $=\frac{1}{2}\|\vec{AB}\times\vec{AC}\|$ dir.

$\vec{AB}\times\vec{AC}=\begin{vmatrix}i&j&k\\-1&1&1\\1&1&-2\end{vmatrix}=i\begin{vmatrix}1&1\\1&-2\end{vmatrix}-j\begin{vmatrix}-1&1\\1&-2\end{vmatrix}+k\begin{vmatrix}-1&1\\1&1\end{vmatrix}=-3i-j-2k$

Alan $=\frac{1}{2}\sqrt{9+1+4}=\frac{1}{2}\sqrt{14}\ br^2$

3) $\mathbb{R}^3$ de iki nokta A ve B olsun.



Burada P keyfi nokta

Şekle göre P noktasının geometrik yerleri doğruyu oluşturur. Buna göre $\vec{OP}=\vec{OA}+\lambda\vec{AB}$ doğrunun vektöreldeki

$P(x,y,z)$, $A(a_1,a_2,a_3)$, $B(b_1,b_2,b_3)$ olmak üzere

$(x,y,z)=(a_1,a_2,a_3)+\lambda(b_1-a_1,b_2-a_2,b_3-a_3) \Rightarrow x=a_1+\lambda(b_1-a_1)$, $y=a_2+\lambda(b_2-a_2)$

$z=a_3+\lambda(b_3-a_3)$ parametrik, $\frac{x-a_1}{b_1-a_1}=\frac{y-a_2}{b_2-a_2}=\frac{z-a_3}{b_3-a_3}(=\lambda)$ kartezyendeki

Burada λ bir parametredir

4) $f(x,y,z)$ skaler alanın P_0 noktasında $\vec{u}$ birim vektörü yönündeki yönlendirilmiş türevi $(\vec{u}=(u_1,u_2,u_3))$

$$\left.\frac{df(P)}{dP}\right|_{P=P_0} = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{P_0} u_1 + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{P_0} u_2 + \left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{P_0} u_3 \text{ dir.}$$

Öncelikle $A=-i+j-2k$ vek. yönündeki birim vektörü bulalım. $\vec{u}=\frac{A}{\|A\|}=\frac{1}{\sqrt{6}}(-i+j-2k)$ olur. $(f(x,y,z)=2z^2-xyz-xy^2)$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{P_0(-1,2,1)} = \left.(-yz-y^2)\right|_{P_0} = -2\cdot 1-2^2=-6$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{P_0} = \left.(-xz-2xy)\right|_{P_0} = \underbrace{-(-1)\cdot 1}_{1}-2\cdot(-1)\cdot 2=1+4=5$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{P_0} = \left.(4z-xy)\right|_{P_0} = 4\cdot 1-(-1)\cdot 2=6$$

o halde

$$\left.\frac{df}{dP}\right|_{P_0} = -6\cdot\frac{-1}{\sqrt{6}}+5\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}+6\cdot\frac{-2}{\sqrt{6}} = (6+5-12)\frac{1}{\sqrt{6}} = -\frac{1}{\sqrt{6}} \text{ olur.}$$

---

5) Düzlemde hareket eden bir partikülün kutupsal denklemi $\vec{R}(t)=r(t)(\cos\theta(t)\, i+\sin\theta(t)\, j)$ şeklinde olsun. $\vec{u}=\cos\theta(t)\, i+\sin\theta(t)\, j$ olmak üzere bu partikülün hız vektörü $\vec{V}=\frac{dr(t)}{dt}\vec{u}+r(t)\frac{d\theta(t)}{dt}\frac{d\vec{u}}{d\theta}$ dir. $r(t)=1$, $\theta(t)=t$

$\vec{u}=\cos t\, i+\sin t\, j$ olduğundan $\frac{dr}{dt}=0$, $\frac{d\theta(t)}{dt}=1$, $\frac{d\vec{u}}{d\theta}=-\sin t\, i+\cos t\, j$ olur. Buna göre

$$\vec{V}=\frac{d\vec{u}}{d\theta}=-\sin t\, i+\cos t\, j \text{ olur. } \|\vec{V}\|=\sqrt{\sin^2 t+\cos^2 t}=1 \text{ olur.}$$

Vektörel Analiz Arasınav 28.11.2018

1) $\vec{A}=2i+j$, $\vec{B}=-i+2k$, $\vec{C}=j+k$ vektörleri üzerine kurulan paralel yüzlü cismin hacmini bulunuz.

2) Köşeleri $A(1,0,2)$, $B(0,1,3)$, $C(2,1,0)$ olan üçgenin alanını bulunuz.

3) Doğrunun üçboyutlu uzayda vektörel, parametrik ve kartezyen denklemini bulunuz.

4) $f(x,y,z)=2z^2-xyz-xy^2$ skaler alanın $P_0(-1,2,1)$ noktasında $\vec{A}=-i+j-2k$ yönündeki yönlendirilmiş türevini bulunuz.

5) Bir düzlemde hareket eden bir partikülün vektörel denklemi $\vec{R}(t)=(\cos t)i+(\sin t)j$ şeklinde veriliyor. Buna göre bu partikülün hızını bulunuz.

Not: Sadece dört soru seçerek cevaplandırınız.

Süre 80 dk dır.

Başarılar. N.A